Cours de physique générale I

pour étudiants en section d'Informatique

(automne 2024)

Dr. Stefano Rusponi
Laboratoire des nanostructures à la surface

Resumé

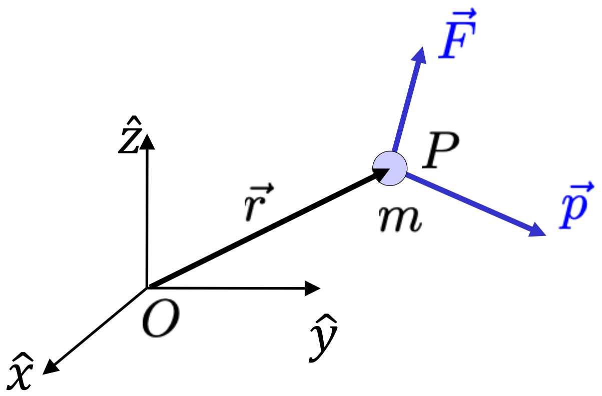
Site web du cours:

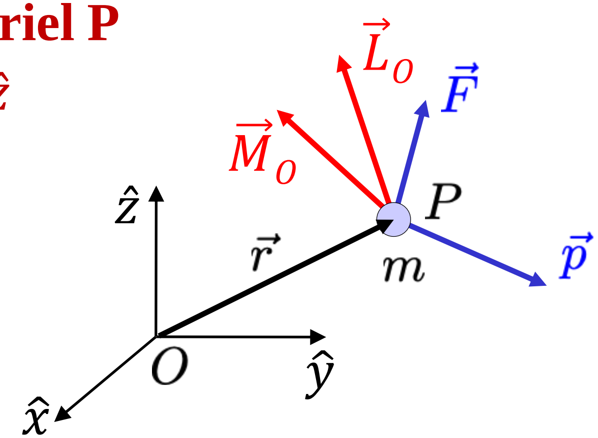
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15445

2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique

pour un point matériel P

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$





$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Résultante des forces:

$$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i}$$

Moment de la résultante des force par rapport à un point O :

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i}$$

= 0 si force centrale

Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

2ème loi de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$ si m constante

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

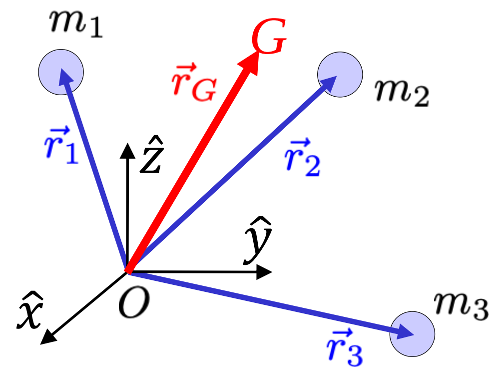
= 0 si force centrale

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique

système (indéformable ou pas) de points matériels P_i

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$



Centre de masse G

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

Résultante des forces $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

Quantité de mouvement

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_G$$

2ème loi de Newton

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G$$

Moment de la résultante des force $\vec{M}_O$ par rapport à un point O :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G$$

Théorème du moment cinétique par rapport à O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$$

Collisions entre deux corps

- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu

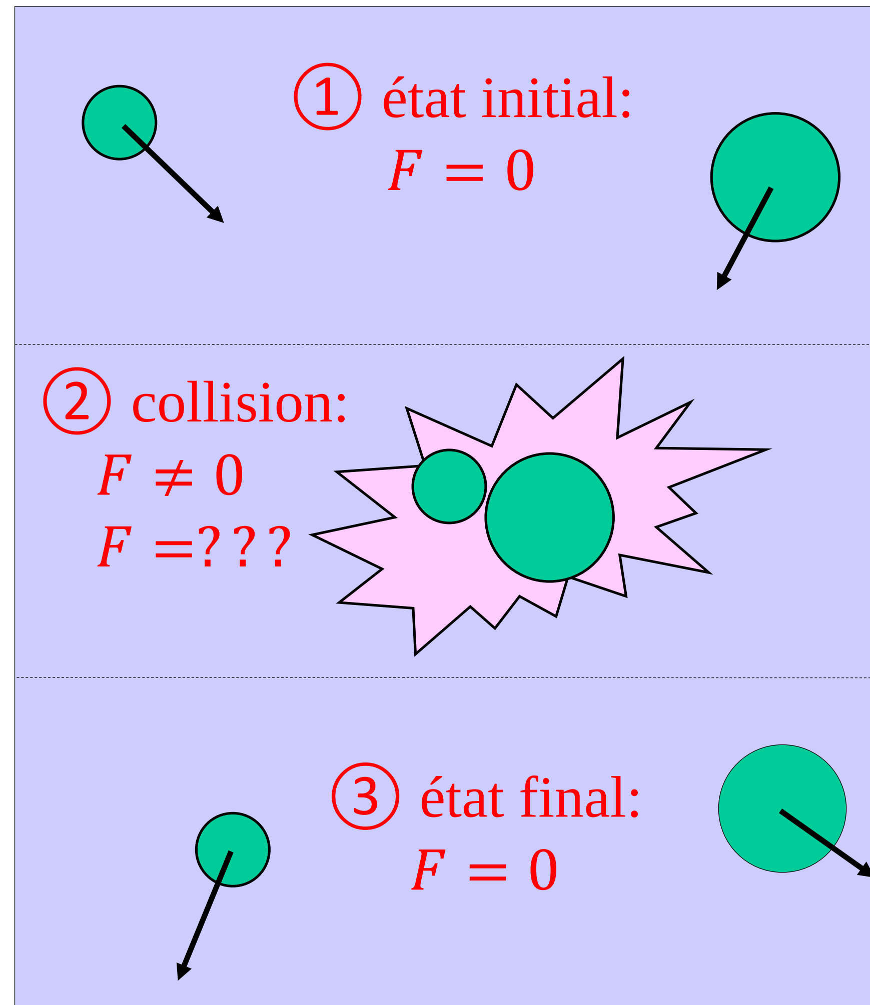
- Modélisation: le système des deux corps est isolé

$\boxed{\Rightarrow \vec{L}_{tot} \text{ et } \vec{p}_{tot} \text{ conservés}}$

  (1) Bien avant le choc ($t \ll 0$):
  - Les corps n'exercent aucune force l'un sur l'autre (ils sont très éloignés et on suppose une force à courte portée)
  - Chaque corps est un système isolé

  (2) Pendant le choc ($t \simeq 0$):
  - Les corps interagissent, sous l'effet d'une force F (qu'on ne décrit pas)

  (3) Bien après le choc ($t \gg 0$):
  - Les corps sont à nouveau libres



état initial ≠ état final: les corps ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement:

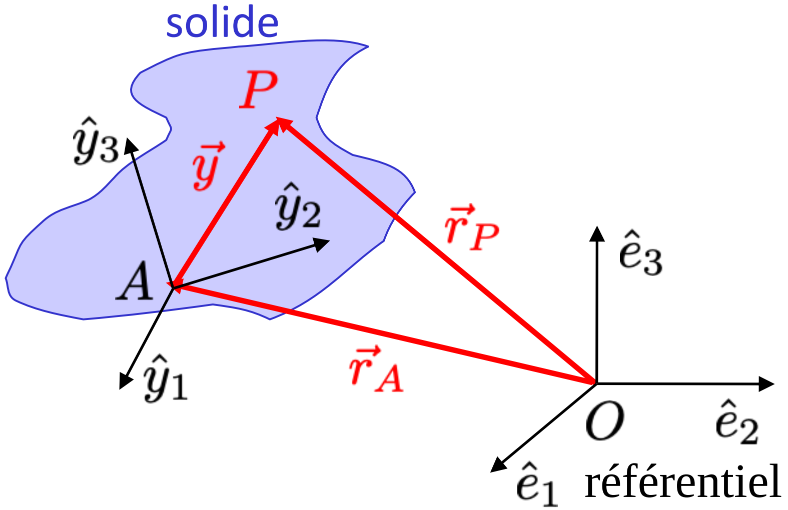
$$\Delta\vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F}dt = \text{impulsion}$$

démo: mesure de la durée d'un choc

2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique

système (indéformable ou pas) de points matériels P_i

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$



Centre de masse G

$$\boxed{\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}}$$

Théorème du transfert: $\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G}$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A quelconque:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G}$$

Cas particuliers: $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$ si $\vec{v}_A = 0$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \text{ si } \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \text{ si } A = G$$

Tenseur d'inertie par rapport à un point A du solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{AP_\alpha} \cdot \vec{\omega}\right) \overrightarrow{AP_\alpha} \right] = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

$\tilde{I}_A =$ tenseur d'inertie au point A d'éléments $\tilde{I}_{Aij}$

Matrice symétrique: $I_{Aij} = I_{Aji}$

$$\tilde{I}_A = \begin{pmatrix} I_{A11} & I_{A12} & I_{A13} \\ I_{A21} & I_{A22} & I_{A23} \\ I_{A31} & I_{A32} & I_{A33} \end{pmatrix} \neq \tilde{I}_G$$

Cas particuliers:

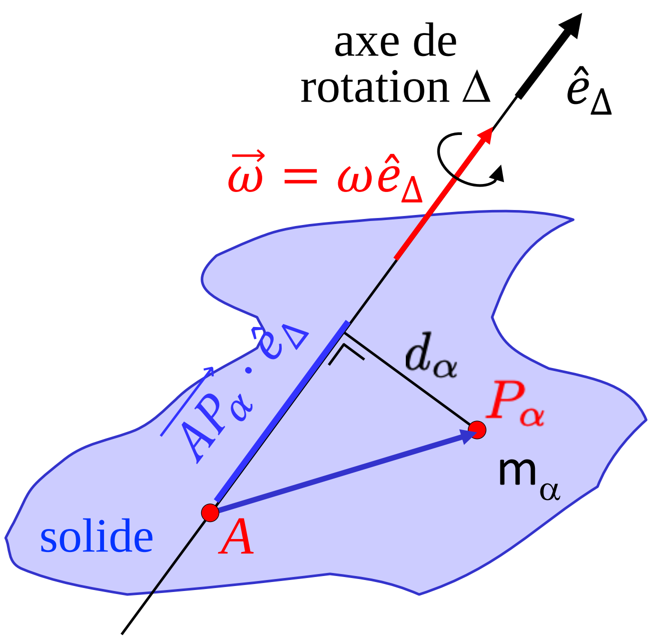
Si $\vec{v}_A = 0$ alors $\vec{L}_A = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$

Si A = G alors $\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$

- Si A est un point sur l'axe de rotation Δ:

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \hat{e}_\Delta = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \cdot \hat{e}_\Delta = \omega \tilde{I}_A \cdot \hat{e}_\Delta \cdot \hat{e}_\Delta = \omega I_\Delta$$

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$$



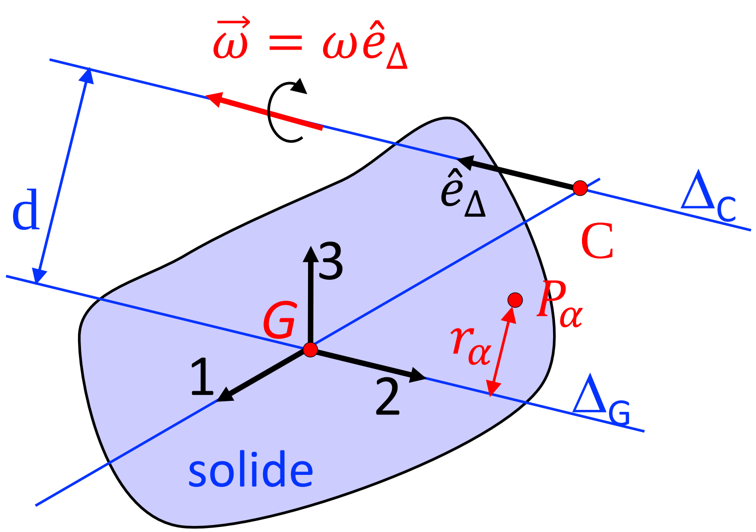
Axes principaux d'inertie et formule de Steiner

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé (Repère d'inertie) au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale :

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Moments d'inertie principaux : moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d les éléments diagonaux de $\tilde{I}_C$dans le repère d'inertie

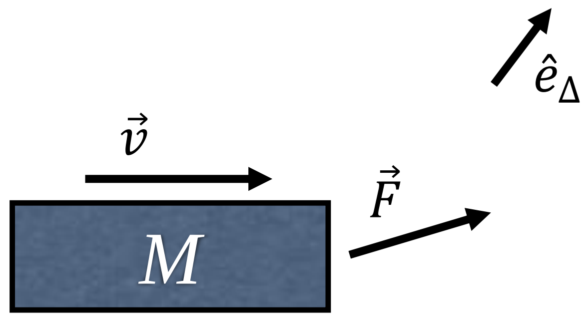
$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$



$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + md^2$$

Formule de Steiner

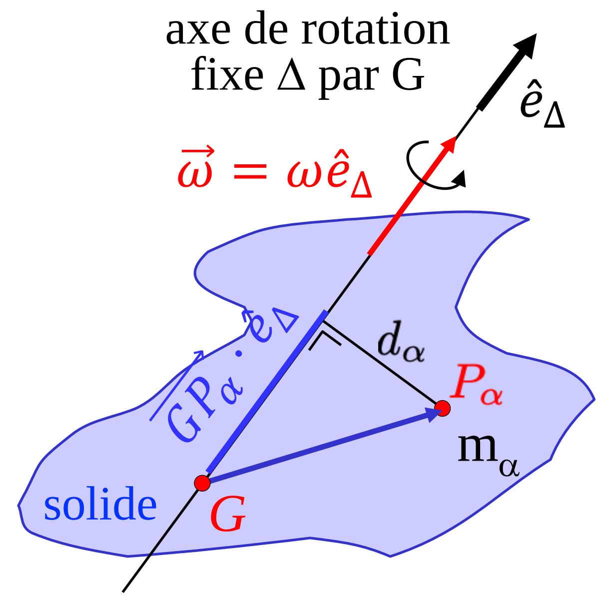
8.3 Masse (d'inertie) et moment d'inertie



2eme loi de Newton

$$F_\Delta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\Delta = M\vec{a}_G \cdot \hat{e}_\Delta = M\frac{d\vec{v}_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt}$$
$$= M\frac{dv_{G\Delta}}{dt}$$

La MASSE (inertielle ou d'inertie) mesure la résistance (inertie) qu'oppose le corps à toute accélération ou à toute modification de l'état de MOUVEMENT (RECTILIGNE)



$$L_\Delta = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta = \omega \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 = I_\Delta \omega$$

$$M_\Delta = \vec{M}_G \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{dL_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt} = \frac{dL_\Delta}{dt}$$
$$= I_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

La MOMENT D'INERTIE mesure la résistance qu'oppose le corps à toute modification de l'état de ROTATION.

Théorèmes de l'énergie

$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Travail de la force $\vec{F}$

$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1}$$

***Théorème de l'énergie cinétique*:**
La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces

N.B.: Pour un système de points (solide ou pas)

$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1}$$

$$\boxed{E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}}$$

Théorème de l'énergie mécanique:
Pour des forces conservatives, l'énergie mécanique E est conservée

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\boxed{E_{cin} = K = \frac{1}{2}M\vec{v}_A^2 + M\vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}}$$

Cas particuliers

- Si $\vec{v}_A = 0$ $\Rightarrow$ $E_{cin} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \tilde{I}_{\Delta_A}\omega\hat{e}_\Delta = \frac{1}{2}\tilde{I}_{\Delta_A}\omega^2$

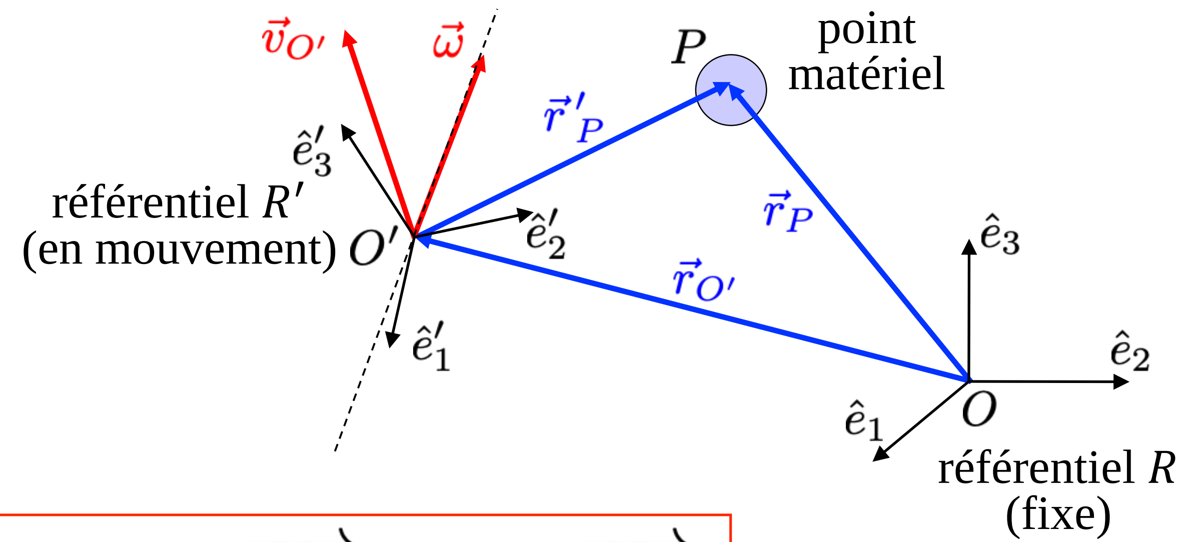
- Si $A = G$ $\Rightarrow$ $E_{cin} = \frac{1}{2}Mv_g^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_{\Delta_G}\omega^2$ $\Leftrightarrow$ $K = K^* + \frac{1}{2}Mv_G^2$

$K^* = \frac{1}{2}\tilde{I}_{\Delta_G}\omega^2$

$M\vec{v}_G \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GG}\right) = 0$

2eme théorème de König

Changement de référentiel



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}\,'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}\,'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

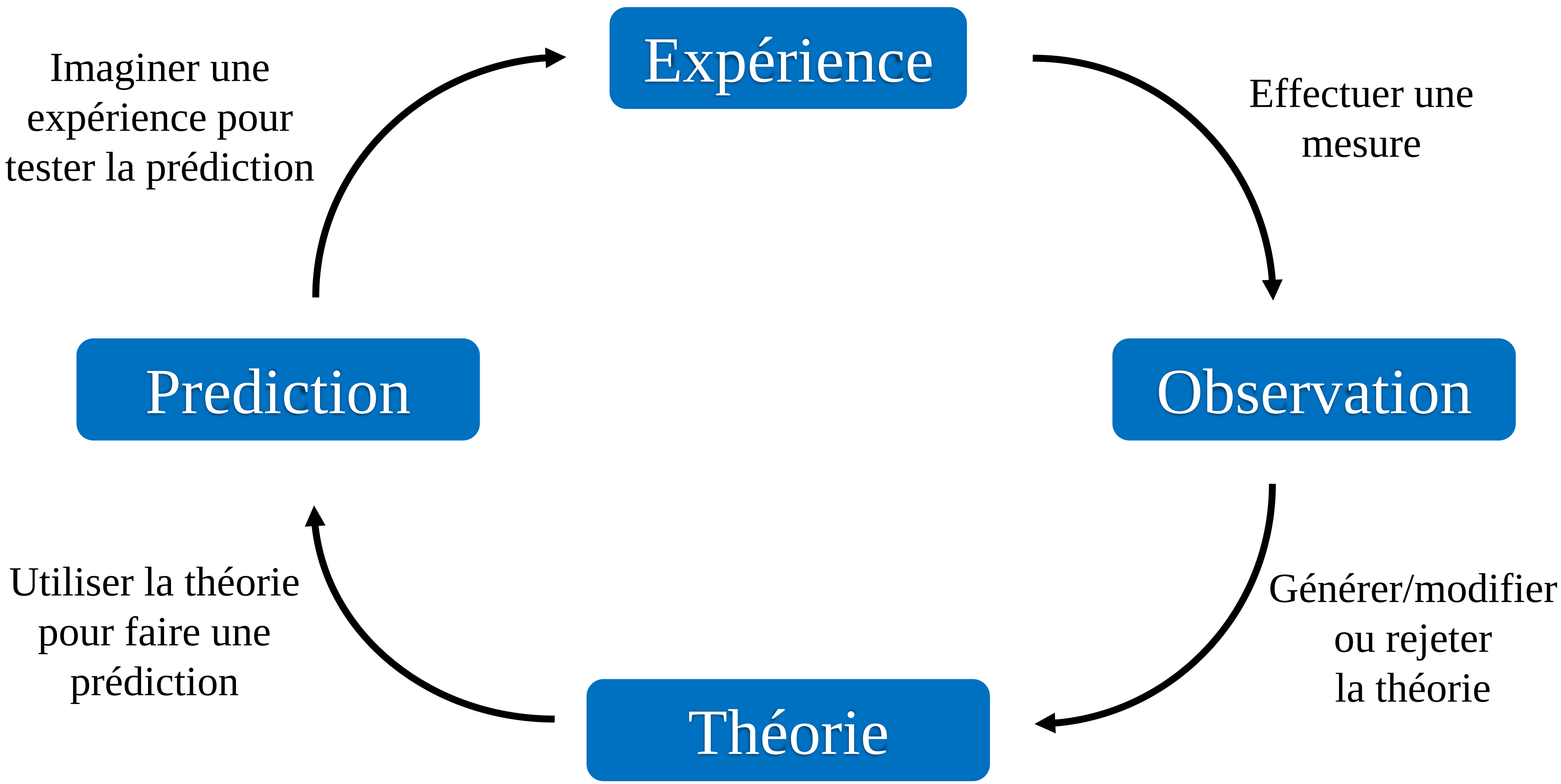
Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a:

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} \overbrace{- \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}^{\sum \vec{F}^{inertie}}$$

force de Coriolis

force centrifuge

La méthode scientifique de Galilée



Il faut apprendre la méthode scientifique
pour résoudre n'importe quel type de problème

La mécanique (qui décrit notre quotidien) est le meilleur exercice

→ [démo tabouret tournant]   → [démo pendule]   → démo: [gyroscope]

Examen

Vendredi 17 Janvier 2025 de 09h15 à 12h45

Travail individuel en silence, totalement dédié, sans interaction avec une autre personne

Matériel autorisé: papier vierge, stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon

formulaire personnel manuscrit de 2 pages A4 (= 1 feuille A4 recto-verso)

la feuille de texte de l'examen comprend ce formulaire

Formulaire

Coordonnées cylindriques

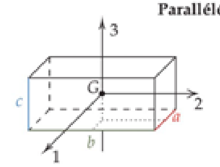
$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{e}_\phi$$

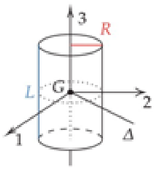
Moments d'inertie usuels

Parallélépipède rectangle plein



$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12}M\left(b^2+c^2\right) \\ I_2 = \frac{1}{12}M\left(c^2+a^2\right) \\ I_3 = \frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$$

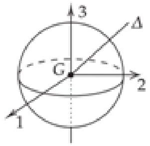
Cylindre de révolution



Plein : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

Creux : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2$, $I_3 = MR^2$

Sphère



Boule pleine : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

Sphère creuse : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$